APPENDICE A

INTERPOLAZIONE

Interpolare vuol dire leggere tra le righe delle tabelle.
(J. Todd, *Basic Numerical Mathematics*)

A.1 Interpolazione Lineare

Malgrado la diffusione del personal computer, che in pochi secondi ci fornisce la situazione del cielo per la data voluta, qualche volta si ha disposizione solo una tabella e una calcolatrice tascabile.

Le riviste specializzate di astronomia, per esempio, pubblicano mensilmente le posizioni dei pianeti con intervalli di cinque o dieci giorni; gli almanacchi, più precisi, riportano tali valori per tutti i giorni dell'anno alle 0^h TU. Un analogo discorso lo si potrebbe fare per gli orari del sorgere e del tramontare del Sole, o per le fasi della Luna. In tutti questi casi vengono tabellati valori solo per un numero discreto di istanti di tempo.

Poniamo, ad esempio, di voler conoscere l'ascensione retta (α), di Marte il giorno 19 ottobre 1995 alle ore 18^h TU e di avere a disposizione solo i due valori calcolati per le 0^h TU del 16 e del 21 di ottobre 1995. Se immaginiamo di porre su un diagramma cartesiano il tempo in ascissa e i valori dell'ascensione retta (AR) in ordinata, ai due valori noti corrisponderanno sul piano due punti di coordinate (T_1, α_1) e (T_2, α_2)[1].

Con α^* e T^* abbiamo indicato rispettivamente l'a.r. che vogliamo trovare e l'istante di tempo considerato (19/10/1995/18^h TU).

Come si capisce dal grafico, non abbiamo fatto altro che congiungere i punti che rappresentano i valori noti con un segmento di retta, e supporre che la coppia (T^*, α^*) si trovi su di esso. Questo equivale a dire che abbiamo ipotizzato che l'a.r. vari linearmente tra T_1 e T_2 (vedi fig. A.1).

E' evidente che si tratta di un'approssimazione piuttosto grossolana visto che la posizione dei pianeti segue una legge tutt'altro che lineare, ma per conoscere in linea di massima il valore che ci serve è la tecnica più semplice che possiamo usare.

Per ricavare α^* dobbiamo ricordarci la formula per trovare l'equazione della retta che passa per due punti:

[1] Per poter essere usati nella formula di interpolazione i tempi e le ascensioni rette devono essere decimalizzati: si devono convertire le a.r. in ore+frazione di ora e i tempi in giorno+frazione di giorno. Per altri chiarimenti in proposito, si legga l'appendice B.

$$\frac{T-T_1}{T_2-T_1}=\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$$

dalla quale si ricava

$$a^*=\left(T^*-T_1\right)\frac{a_2-a_1}{T_2-T_1}+a_1$$

Questo procedimento prende il nome di *interpolazione lineare* e dà risultati tanto più esatti quanto il valore da cercare varia gradualmente e con piccoli incrementi tra i due estremi noti.

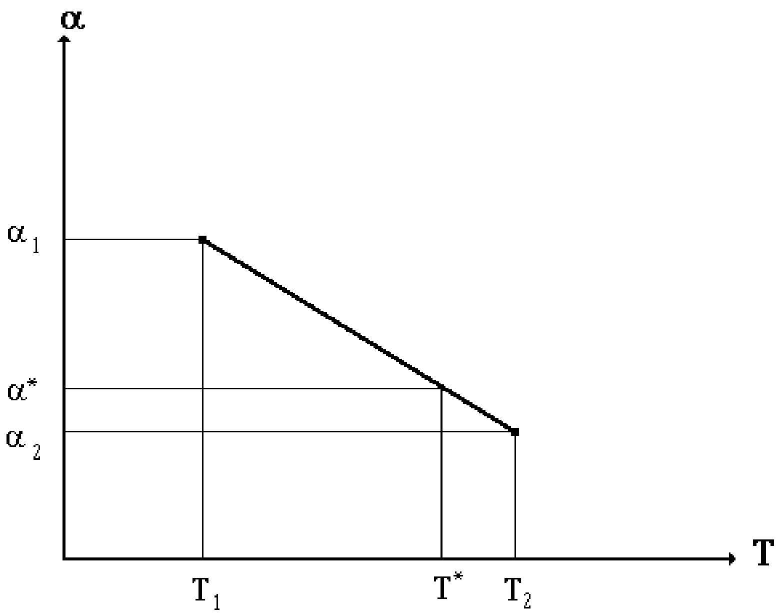

Figura A.1

Problema A.1. Noti i seguenti valori per l'ascensione retta di Marte nel mese di ottobre 1995

giorno	*ora*	*ascensione retta*
16/10/1995	0^h TU	$15^h\,36^m\,17^s$
21/10/1995	0^h TU	$15^h\,51^m\,03^s$

Calcolare tramite interpolazione lineare il valore approssimato dell'a.r. del pianeta per il giorno 19 dello stesso mese alle ore 18^h TU.

A.2 Formule di Interpolazione Non Lineare

L'interpolazione lineare di un valore da una tabella è la più semplice da calcolare perché bastano solo due termini e si deve applicare una semplice formula, ma paga lo svantaggio di un'approssimazione che in certi casi potrebbe essere eccessiva, soprattutto se il comportamento della funzione tabellata è fortemente *non lineare*.

Esistono altre tecniche di interpolazione non lineari, che a partire da N valori tabulari, approssimano la funzione con una curva polinomiale di grado N–1. Non entreremo nel dettaglio di questi metodi che si basano su proprietà matematiche che non vengono trattate nei programmi della scuola secondaria superiore; per chi fosse interessato alle dimostrazioni, si rimanda a qualunque testo di *analisi numerica*.

Il vantaggio dell'interpolazione non lineare sta nel fatto che l'errore rispetto al valore esatto è praticamente lo stesso generato dal calcolo diretto della funzione da parte del computer che è, comunque, ottenuto numericamente tramite procedimenti di approssimazione.

A.2.1 Interpolazione da tre valori tabellari

Date tre coppie di valori (x, y), con x_1, x_2 e x_3 presi ad intervallo tabulare u costante, tali cioè che $u = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, si crea la *tavola delle differenze*

$$
\begin{array}{cccc}
x_1 & y_1 & & \\
 & & a & \\
x_2 & y_2 & & c \\
 & & b & \\
x_3 & y_3 & &
\end{array}
$$

con

$a = y_2 - y_1$ $\qquad$ $b = y_3 - y_2$ $\qquad$ $c = b - a = y_1 - 2y_2 + y_3$

Si deve scegliere y_2 il più vicino possibile al valore y* cercato; per x = x*, si pone $n = (x^* - x_2) / u$, poiché n va espresso in *unità di intervallo tabulare* u; questo vuol dire, per esempio, che se x_1, x_2 e x_3 rappresentano i giorni 1, 16 e 31 del mese, l'intervallo tabulare è $u = 15^d$, da cui, per x* = 19, n = (19 – 16) / 15 = 0,2.

Si applica quindi, la formula

$$y^* = y_2 + n \cdot (a + b + nc) / 2$$

L'errore sarà tanto più piccolo quanto c è prossimo a 0.

A.2.2 Interpolazione da cinque valori tabellari

Si procede in modo analogo al metodo precedente, ricavando per prima cosa la tavola delle differenze per cinque valori della funzione tabulata ad intervallo costante

$$\begin{array}{cccccc}
x_1 & y_1 & & & & \\
 & & a & & & \\
x_2 & y_2 & & e & & \\
 & & b & & h & \\
x_3 & y_3 & & f & & j \\
 & & c & & i & \\
x_4 & y_4 & & g & & \\
 & & d & & & \\
x_5 & y_5 & & & &
\end{array}$$

con

$a = y_2 - y_1$	$b = y_3 - y_2$	$c = y_4 - y_3$	$d = y_5 - y_4$
$e = b - a$	$f = c - b$	$g = d - c$	
$h = f - e$	$i = g - f$		
$j = i - h$			

Il valore y* da trovare deve essere il più vicino possibile al valore centrale y_3; per $x = x^*$, posto $n = (x^* - x_3) / u$, essendo u, come spiegato per l'interpolazione a tre valori, l'intervallo tabulare costante, si applica la formula di interpolazione

$$y^* = y_3 + n(b + c) / 2 + n^2 f / 2 + n(n^2 - 1)(h + j) / 12 + n^2(n^2 - 1)k / 24$$

In questo caso l'errore dovuto all'interpolazione sarà tanto minore quanto più j è vicino a 0.