APPENDICE E

CALCOLO APPROSSIMATO DELLE EFFEMERIDI DEI PIANETI

> Dice: chi è che gira, la Terra intorno al Sole o il Sole intorno alla Terra? Dico: boh, non ci ho mai fatto caso.
>
> (Aldo Fabrizi)

Illustriamo qui un metodo per determinare la posizione di un pianeta in cielo. Questo metodo, a causa delle semplificazioni che adotta onde evitare l'uso della trigonometria sferica e delle equazioni complete della meccanica celeste, presenta un certo errore che nei casi più sfavorevoli può assommare a qualche grado d'arco.

Tale errore, inaccettabile per effettuare puntamenti di precisione di strumenti ottici, può risultare poco significativo nel caso si voglia semplicemente verificare se il pianeta sarà visibile o meno nel momento in cui ci si metterà ad osservare il cielo e, se sì, in che zona di cielo si troverà. Stabilito ciò, il pianeta potrà essere facilmente individuato come "intruso" tra le stelle delle mappe celesti in quanto la sua luminosità è sempre abbastanza elevata da permettere di scorgerlo ad occhio nudo (fanno eccezione Urano, Nettuno e Plutone che però sono oggetti molto poco interessanti al telescopio).

Le ipotesi semplificative sopra accennate sono le seguenti:

1) le orbite dei pianeti sono circolari ($e = 0$);
2) i piani orbitali dei pianeti coincidono con l'eclittica ($i = 0°$).

Queste ipotesi sono abbastanza lecite in quanto tutti i pianeti (tranne Mercurio e Plutone) presentano eccentricità piuttosto piccole e inclinazioni prossime a zero (v. tabella 3.1 del cap. 3). L'errore commesso sarà tanto maggiore quanto più grandi sono le effettive eccentricità ed inclinazioni: per intenderci, non usatelo per Mercurio o Plutone!

Conseguenza della prima ipotesi ($e = 0$) è una velocità orbitale costante e pari al rapporto tra lunghezza dell'orbita e periodo di rivoluzione. Conseguenza della seconda ($i = 0°$) è la "sparizione" della linea dei nodi, che rimane indeterminata in quanto tutti i piani orbitali vengono a coincidere con l'eclittica.

Perciò, la posizione del pianeta in un certo istante di riferimento T_0 è univocamente determinata dall'angolo che il suo raggio vettore forma in quell'istante rispetto alla direzione del punto d'Ariete (fig. E.1). Questo angolo, η, è detto *longitudine eliocentrica* del pianeta.

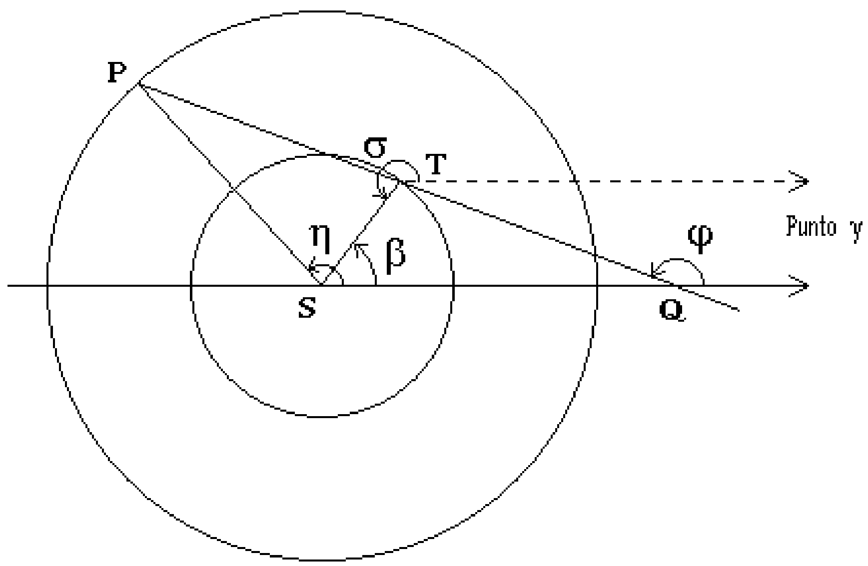

Figura E.1

L'angolo φ tra la congiungente Terra-pianeta (TP) e la direzione del punto gamma è chiamato *longitudine geocentrica* del pianeta[1] .

E' evidentemente possibile definire una longitudine eliocentrica per tutti i pianeti (ed anche per la Terra: l'angolo β in figura E.1), così come è possibile definire una longitudine geocentrica per tutti i pianeti (ed anche per il Sole: l'angolo σ).

> **Problema E.1.** Sapreste esprimere la longitudine geocentrica del Sole in funzione della longitudine eliocentrica della Terra?

La longitudine eliocentrica dei pianeti per una certa data di riferimento può essere ricavata da un almanacco. Qui si riporta un estratto

[1] Il disegno e la trattazione che seguono fanno riferimento ad un pianeta superiore, ma nulla cambia per un pianeta inferiore.

dell'*American Ephemeris and Nautical Almanac*, che fornisce gli elementi necessari per i calcoli:

Tabella E.1 - Elementi orbitali dei pianeti

Pianeta	**Semiasse (UA)**	**Periodo (giorni)**	h_0 (°)
Mercurio	0,3871	87,969	341°,111
Venere	0,7233	224,701	326°,400
Terra	1,0000	365,256	276°,117
Marte	1,524	686,980	265°,096
Giove	5,203	4332,589	188°,568
Saturno	9,519	10759,22	31°,074
Urano	19,28	30685,4	183°,225
Nettuno	30,17	60189	237°,573
Plutone	39,76	90465	175°,423

T_0 = 28 Giugno 1969, $00^h\ 00^m$ TU (2440400,5 JD).

Nota la posizione del pianeta all'epoca T_0, vediamo come si fa a determinare la sua posizione alla data attuale, T.

Innanzitutto bisogna contare quanti giorni sono passati da T_0 a T: per fare questo utilizzeremo la data giuliana (vedi § 2.2 o appendice D).

La longitudine eliocentrica del pianeta alla data attuale è pari alla longitudine eliocentrica alla data T_0, più l'arco d'orbita Δ percorso nell'intervallo $(T-T_0)$. Questo arco può essere calcolato tramite una semplice proporzione, in quanto l'ipotesi $e = 0$ ci assicura, come in precedenza osservato, che la velocità orbitale è costante:

$$360° : \text{(Periodo orbitale)} = \Delta : (T - T_0)$$

Si ottiene allora

$$\Delta = 360° \times \text{(Periodo orbitale)} / (T - T_0)$$

ed

$$\eta = \eta_0 + \Delta$$

(eventualmente ridotto al primo giro se dovesse superare 360°).

Se ora fossimo sul Sole, il gioco sarebbe fatto in quanto la longitudine eliocentrica η ci indicherebbe la direzione in cui guardare. Però siamo sulla Terra, e quindi la direzione in cui guardare è la longitudine geocentrica φ, per calcolare la quale occorre fare qualche altro passaggio.

Per prima cosa, procedendo in modo completamente identico, si calcola la longitudine eliocentrica β della Terra. Se adesso consideriamo il triangolo PST, ci accorgiamo che di esso sono noti i due lati PS ed ST, pari rispettivamente ai semiassi maggiori delle orbite del pianeta e della Terra, e l'angolo PST = $\eta - \beta$. Il triangolo PST è allora risolubile, in quanto sono noti i valori di due lati ed un angolo. Si potrà allora calcolare quanto vale l'angolo STP e, di conseguenza, anche l'angolo STQ = 180° – STP.

Per la nota proprietà per cui un angolo esterno di un triangolo è pari alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti, la longitudine geocentrica φ vale

$$\varphi = \beta + \mathrm{STQ}$$

Il problema è dunque risolto, a patto di risolvere il triangolo STP. Possiamo, a tal proposito, scrivere le seguenti relazioni:

$$\mathrm{SPT} = \varphi - \eta$$
$$\mathrm{STQ} = \varphi - \beta$$
$$\mathrm{PTS} = 180° - \mathrm{STQ} = 180° - \varphi - \beta$$

Essendo inoltre, per ogni angolo θ,

$$sen(180° - \theta) = sen(\theta)$$

applicando una volta il teorema dei seni al triangolo PTS si ottiene

$$sen(\varphi - \eta) : |\mathrm{ST}| = sen(\varphi - \beta) : |\mathrm{SP}|$$

con la quale si può determinare l'unica incognita, φ.

Purtroppo, la soluzione analitica di questa equazione trascendente è impossibile perché φ compare ad argomento di entrambe le funzioni trigonometriche. Si potrebbe procedere per tentativi, ma la cosa sarebbe lunga e tediosa a meno di non disporre di un calcolatore (nel qual caso il gioco non varrebbe la candela, perché ci sono programmi che forniscono risultati molto più precisi in tempi assai inferiori).

Procediamo allora in un altro modo, mettendo da parte tutte le precedenti considerazioni sui triangoli. Tracciamo un disegno accurato in scala del sistema Terra-Sole-pianeta, utilizzando i valori dei semiassi riportati in precedenza e gli angoli η e β calcolati. Fatto ciò, tracciamo la retta PQ e, con un goniometro, misuriamo φ. Abbiamo così determinato la longitudine geocentrica del pianeta e possiamo risalire alla costellazione in cui il pianeta si trova consultando la tabella E.2.

Tabella E.2 - Ampiezze delle Costellazioni

h	**Costellazione**	h	**Costellazione**
28° – 52°	Ariete	217° – 240°	Bilancia
52° – 89°	Toro	240° – 248°	Scorpione
89° – 117°	Gemelli	248° – 266°	Ofiuco
117° – 137°	Cancro	266° – 299°	Sagittario
137° – 173°	Leone	299° – 328°	Capricorno
173° – 217°	Vergine	328° – 350°	Acquario
		350° – 28°	Pesci

Problema E.2. Si confrontino le definizioni di longitudine geocentrica (all'inizio di questa appendice) e di ascensione retta (§ 1.3). Qual è la differenza tra questi due angoli?

Possiamo infine calcolare anche ascensione retta e declinazione del pianeta. Per passare dalla longitudine geocentrica all'ascensione retta e alla declinazione esistono formule di trigonometria sferica esatte, ma per i nostri scopi ci limitiamo a fornire le tabelle di conversione E.3 ed E.4. Tra un valore e l'altro è sempre possibile interpolare utilizzando uno dei metodi spiegati nell'appendice A.

Tabella E.3
Conversione Longitudine Geocentrica - Ascensione Retta

h a	h a	h a
16° = 1^h	133° = 9^h	256° = 17^h
32° = 2^h	148° = 10^h	270° = 18^h

47° = 3^h	164° = 11^h	284° = 19^h
62° = 4^h	180° = 12^h	298° = 20^h
76° = 5^h	196° = 13^h	313° = 21^h
90° = 6^h	212° = 14^h	328° = 22^h
104° = 7^h	227° = 15^h	344° = 23^h
118° = 8^h	242° = 16^h	360° = 24^h

Tabella E.4 - Declinazione dell'eclittica

a	d	a	d	a	d
1^h	+ 6°,5	9^h	+17°,0	17^h	–22°,7
2^h	+12°,2	10^h	+12°,2	18^h	–23°,5
3^h	+17°,0	11^h	+ 6°,5	19^h	–22°,7
4^h	+20°,6	12^h	0°,0	20^h	–20°,6
5^h	+22°,7	13^h	– 6°,5	21^h	–17°,0
6^h	+23°,5	14^h	–12°,2	22^h	–12°,2
7^h	+22°,7	15^h	–17°,0	23^h	– 6°,5
8^h	+20°,6	16^h	–20°,6	0^h	0°,0

Probabilmente un esempio aiuterà a chiarire meglio quanto è stato detto fin qui. Si voglia calcolare la posizione di Giove alle 18^h TU del giorno 13 settembre 1999, corrispondente (v. § 2.2) alla data giuliana 2451435,25. Tra l'istante T_0 e questa data sono trascorsi

$$(T - T_0) = 2451435{,}25 - 2440400{,}50 = 11034^d{,}75$$

Poiché il periodo siderale di Giove è $4332^d{,}589$ (tab. 3.1), in questo lasso di tempo il pianeta avrà compiuto un arco di orbita di

$$\Delta = 360° \times (11034^d{,}75 / 4332^d{,}589) = 916°{,}892$$

e pertanto, alle 18^h del 13 settembre 1999, la longitudine eliocentrica di Giove sarà pari a

$$\eta = 188°{,}568 + 916°{,}892 = 1105°{,}460 = 25°{,}460$$

(abbiamo ridotto l'arco al primo giro).

Per quel che riguarda la Terra, allo stesso modo, è

$$\Delta' \;=\; 360° \times (11034^d{,}75 \,/\, 365^d{,}256) \;=\; 10875°{,}961$$

e perciò

$$\beta \;=\; 276°{,}117 + 10875°{,}961 \;=\; 11152°{,}078$$

che ridotto al primo giro diviene

$$\beta = \; 352°{,}078$$

Facciamo ora un disegno in scala del sistema Sole-Terra-Giove. Se, ad es., l'orbita terrestre venisse tracciata con raggio di 1 cm, quella di Giove dovrebbe avere raggio 5,2 cm; gli angoli β ed η dovranno, ovviamente, essere pari a quelli calcolati.

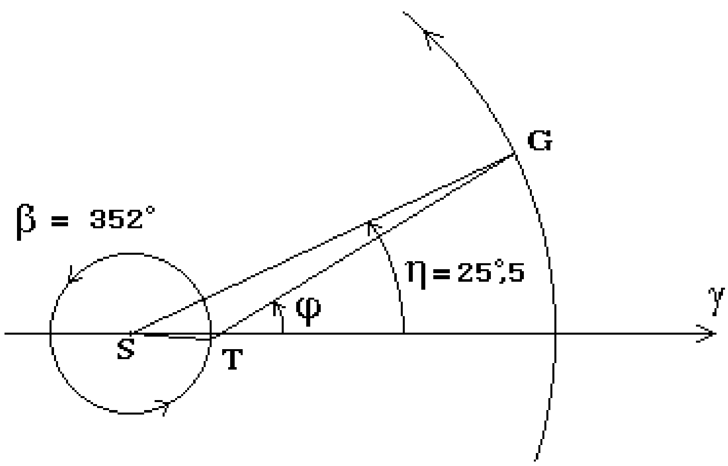

Figura E.2

Con il goniometro misuriamo φ che risulta pari a circa 33°. La tabella E.2 ci dice quindi che Giove si trova in Ariete. Inoltre, utilizzando la tabella E.3, troviamo che φ eccede di 1° il valore corrispondente a 2^h; applicando la formula di interpolazione lineare si ha

$$\alpha \;=\; 2^h + 1° \,/\, (47° - 32°) \;=\; 2^h\, 04^m$$

Allo stesso modo, interpolando tra i dati della tabella E.4 troviamo che l'eclittica (non il pianeta!) ha una declinazione

$$\delta_E = 12°,2 + (17°,0 - 12°,2) \times 4^m / 60^m = 12°,5 = 12°30'$$

Poiché l'inclinazione dell'orbita di Giove è 1°18' circa (v. tabella 3.1), ci possiamo aspettare che Giove si trovi sopra o sotto l'eclittica ma comunque non più distante da essa di 1°18'. Con tale incertezza, possiamo affermare che Giove avrà una declinazione compresa tra (12°30' − 1°18') e (12°30' + 1°18'), ossia tra 11°12' e 13°48'.

I valori esatti, determinati con un programma per calcolatore che fa uso di algoritmi più accurati, sono $\alpha = 2^h\ 10^m$, $\delta = 11°\ 34'$. Come si vede gli errori commessi sono molto piccoli e ampiamente accettabili.

Problema E.3. All'istante considerato, Giove sarà visibile da Roma?

Problema E.4. Dove si trova il Sole in quell'istante?